

ביה"ס למדעי המחשב ומתמטיקה. תשס"ו, 21.07.2006
 מבנים אלגבריים. סמסטר ב', מועד א'.
 שם המרצה: פרופ' מ. מוזיצ'וק.
 משך המבחן: 2.5 שעות.

אפשר להשתמש רק במחשיבון ובדפי עזר המצורפים לטופס הבחינה.

יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות.

1. 14 נקודות.

יהי $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם של חבורות סופיות. הוכח ש:
 א. לכל איבר $g \in G$ מתקיים $o(f(g)) \mid o(g)$.
 ב. f חח"ע אם ורק אם $o(f(g)) = o(g)$ מתקיים לכל איבר $g \in G$.

2. 14 נקודות

תהי H תת-חבורה כלשהי של חבורה G . אז:

1. $\forall g \ g \in g * H$
2. $g_1 \in g_2 * H \Leftrightarrow g_1 * H = g_2 * H$
3. $\forall g_1 \forall g_2 \ (g_1 * H = g_2 * H) \vee (g_1 * H \cap g_2 * H) = \emptyset$

3. 14 נקודות

לכל פולינום $f(x) \in F[x]$ ולכל סקלר $a \in F$ התנאים הבאים שקולים:
 א. a שורש של $f(x)$ (כלומר $f(a) = 0$).
 ב. $f(x)$ מתחלק ב- $x - a$ ללא שארית.

4. 14 נקודות

יהי F שדה כלשהו. נבחר סקלר $a \in F$ כלשהו ונגדיר R כקבוצה של כל המטריצות

מהצורה $\begin{pmatrix} x & y \\ ay & x \end{pmatrix}$ כאשר $x, y \in F$. הוכח ש:

- א. R תת-חוג קומוטטיבי של $M_2(F)$.
- ב. R יהיה שדה אם ורק אם למשוואה $x^2 = a$ אין פתרונות ב- F .

12.5 נקודות.

שתי תמורות של הקבוצה $\mathbf{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות ע"י הנוסחאות הבאות:

$$f = (0,5,3,1)(2,1,4,6), g^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{5x+3}{2x+5}, & x \neq 1 \\ 6, & x = 1 \end{cases}, x \in \mathbf{Z}_7$$

- א. חשב את gf^2 .
- ב. פרק את gf^2 למכפלה של מחזורים זרים.
- ג. מצא את הסדר של gf^2 .
- ד. פרק את gf^2 למכפלה של חילופים:

12.6 נקודות.

א. חשב את המחלק המשותף הגדול ביותר של הפולינומים

$$a(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 \in \mathbf{Z}_5[x], b(x) = x^3 - x^2 + x + 4 \in \mathbf{Z}_5[x]$$

ב. מצא שני פולינומים $u(x), v(x) \in \mathbf{Z}_5[x]$ שמקיימים $u(x)a(x) + v(x)b(x) = d(x)$.

10.7 נקודות.

תהי G תת-חבורה ציקלית של S_6 הנוצרת ע"י התמורה $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- א. רשום את כל תמורות של החבורה $G \cap A_6$.
- ב. רשום 3 מחלקות ימניות (שונות) של $G \cap A_6$.

10.8 נקודות.

נתונה חבורת מטריצות $G = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & \\ 0 & 1 & c & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right) \mid a, b, c \in \mathbf{Z}_2 \right\}$. רשום את כל האברים של

החבורה ומול כל איבר רשום את הסדר שלו.

בהצלחה!